

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΚΟΛΛΕΓΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ 2018-2019

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου
(c): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι $x_1x + y_1y = \rho^2$
(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

A2) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως «Σωστό» ή «Λάθος». :

α) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως

β) $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$

γ) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

δ) Η ευθεία $\varepsilon : x = x_0$, x_0 σταθερός, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.
(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ Β

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overline{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overline{A\Gamma} = -3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{2\pi}{3}$.

B1) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, (4\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})^2 \text{ και } (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2. \quad (\text{ΜΟΝΑΔΕΣ } 9)$$

B2) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να εκφράσετε το διάνυσμα \overline{AM} ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

B3) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων \overline{AB} και \overline{AM}
(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση

$$2x + y - 5 + \lambda(x + 2y - 1) = 0 \quad (1), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Γ1) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Γ2) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο Α.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

Γ3) Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = \frac{1}{2}x + 7$;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι κύκλοι :

$$C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$$

Δ1) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ2) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ϵ) του κύκλου (C_1) στο σημείο Α(5,-1).

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Δ3) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) : $3x - 4y - 19 = 0$ εφάπτεται του κύκλου (C_2).

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Δ4) Να βρείτε το συμμετρικό Λ του κέντρου του κύκλου (C_1) ως προς την ευθεία (ϵ), καθώς και την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Λ που εφάπτεται της ευθείας (ϵ).

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Οδηγίες:

1. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού και στυλό που σβήνει.
2. Επιλέγετε μόνο μπλε ή μαύρο στυλό.
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 (δύο) ώρες.
4. Δυνατή αποχώρηση: 1 (μία) ώρα μετά τη λήψη των θεμάτων.
5. Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.